ΘΕΩΡΗΜΑ 1 (sos)

Έστω η $\bar{f} : U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0 \in U$

τότε :

α) Η f συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U$

β) Η f είναι μερικώς παραγωγίσιμη-διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0$ και ισχύει:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji} \quad , \forall i=1,\dots,n, \ \forall j=1,\dots,m$$

όπου $D = d_{ji}$ πινακας ορισμου της διαφορισιμοτητας

ΠΡΟΣΟΧΗ!

Αν f όχι διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0$ τότε (β) $\not\Rightarrow$ (α) α) $\lim\limits_{\bar{h}\to\bar{0}} \big(\underbrace{\bar{f}(\bar{x}+\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x})}_{} \big) = \bar{0}$

$$\|\bar{h}\| \cdot \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|} + D\bar{h}$$

$$= \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \|\bar{h}\|}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{y}) - \bar{f}(\bar{x}) - D\bar{h}}{\|\bar{h}\|}}_{\exists \text{ απο υποθεση}} + \underbrace{\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} D\bar{h}}_{=0} = \bar{0}$$

β) Έχουμε, $\forall j = 1,2,\dots,m$ είναι:

$$\lim_{\bar{h}\to\bar{0}} \frac{f_j(\bar{x}+\bar{h}) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1},\dots,d_{jn})\bar{h}}{\|\bar{h}\|} = 0$$

δηλ. $\forall \bar{h}_\nu \to \bar{0} : \dfrac{f_j(\bar{x}+\bar{h}_\nu) - f_j(\bar{x}) - (d_{j1},\dots,d_{jn})\cdot\bar{h}_\nu}{\|\bar{h}_\nu\|} \to 0$

($\Rightarrow$) για $\bar{h}_\nu = n_\nu \cdot \bar{e}_i$, $n_\nu \in \mathbb{R}$, $\bar{e}_i = (0,\dots,1,0,\dots,0)$ και με $n_\nu \to 0$ έχουμε:

$$\frac{|f_j(\bar{x}+n_\nu\bar{e}_i) - f_j(\bar{x}) - d_{ji}n_\nu|}{|n_\nu|} \to 0$$

Δηλαδή,

$$\frac{f_j(\bar{x}+n_\nu\bar{e}_i) - f_j(\bar{x})}{n_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} d_{ji}$$

Άρα, $\forall n_\nu \to 0$ έχουμε το (*)

δηλαδή έχουμε $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i}(\bar{x}) = d_{ji} \Rightarrow$

$$\left(\Rightarrow d_{ji} = \lim \frac{f_j(\bar{x}+h e_i) - f(\bar{x})}{h} \right)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση (ή Θεώρημα) αν η $\bar{f}$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$, το $D \in \mathbb{R}^{m\times n}$ του ορισμού είναι μοναδικά ορισμένο ταυτίζεται με τον Ιακωβιανό πίνακα της $\bar{f}$ στο x και ονομάζεται παράγωγος της f στο $\bar{x}$

Δηλαδή $D\bar f(\bar x) = J_f(\bar x) = \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar x)\right) = D$

(διαφορικό της $\bar f$ στο $\bar x$) $\quad i=1,\dots,n$

$j=1,\dots,m$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2

Έστω $f:U\to\mathbb{R}$ με $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό

Επίσης $f\in C^1(U)$, δηλ f μερικώς διαφορίσιμη (ως προς όλα τα x_i και σε όλα τα $\bar x\in U$)

τότε η f διαφορίσιμη (δηλαδή

$$\lim_{\bar h\to\bar 0}\frac{f(\bar x+\bar h)-f(\bar x)-D\bar h}{\|\bar h\|}=0$$

όπου $D=\text{grad}\, f(\bar x)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar x),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar x)\right)$)

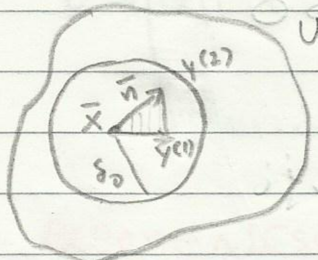
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω $\bar x\in U$. Τότε $(\exists\delta_0>0): B(\bar x,\delta_0)\subseteq U$

Έστω $\bar h=(h_1,\dots,h_n)\in B(\bar 0,\delta_0)\setminus\{\bar 0\}$ τότε

$\bar y^{(k)}=\bar x+\sum_{i=1}^{k}h_i e_i\in B(\bar x,\delta_0)\subseteq U$, $\forall k=1,\dots,n$

με $\bar y^{(0)}=\bar x$



και γενικά:

$\bar x=(x_1,\dots,x_n)$

$h_i e_i=(h_1,h_2,\dots,h_k,0,\dots,0)$

και βέβαια

$\bar y^{(k)}\in B(\bar x,\delta_0)\iff\|\bar y^{(k)}-\bar x\|<\delta_0\iff$

$\iff\left\|\sum_{i=1}^{k}h_i e_i\right\|<\delta_0\iff\sqrt{\sum_{i=1}^{k}h_i^2}\overset{(k<n)}{\le}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}h_i^2}=\|\bar h\|<\delta_0$

Αφού

$\bar y^{(k)}-\bar y^{(k-1)}=h_k\cdot\bar e_k\quad\forall k=1,\dots,n$

Έχω $\theta_k\in[0,1]$ με $f(\bar y^{(k)})-f(\bar y^{(k-1)})=$

$=h_k\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar y^{(k-1)}+\theta_k\cdot h_k\cdot e_k)\Rightarrow$

(από Θ.Μ.Τ.)

$\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\left(f(\bar y^{(k)})-f(\bar y^{(k-1)})\right)=f(\bar x+\bar h)-f(\bar x)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar x+\bar h)-f(\bar x)-\text{grad}\, f(\bar x)\cdot\bar h=$

$=\sum_{k=1}^{n}h_k\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar y^{(k-1)}+\theta_k\cdot h_k\cdot\bar e_k)-\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar x)\right)$

$$\Rightarrow \left| f(\bar{x}+\bar{h}) - \bar{f}(\bar{x}) - \text{grad } f(\bar{x})\cdot\bar{h} \right| \leq$$

$$\leq \|\bar{h}\| \cdot \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k h_k \bar{e}_k\right) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right|$$

Τέλος, αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ συνεχείς στο $\bar{x}$ $\forall k=1,\dots,n$

Έχουμε: $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta \in (0,\delta_0)) : \left|\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}+\bar{h}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})\right| < \frac{\varepsilon}{n}$

και αφού $\|\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k \cdot h_k \cdot \bar{e}_k - \bar{x}\| < \delta$ $\quad \forall \bar{h} \in B(\bar{0},\delta)$

$\forall \bar{h} \in B(\bar{0},\delta) \setminus \{\bar{0}\} : \dfrac{|f(\bar{x}+\bar{h}) - f(\bar{x}) - \text{grad} f(\bar{x})\cdot h|}{\|\bar{h}\|} < \varepsilon$